الفضاءات المتجهية الحقيقية

I – تعريف و أمثلة :

1 – قانون تركيب خرجي :

a – تعريف :

لتكن A و E مجموعتين غير فارغتين

كل تطبيق f من $A\times E$ نحو E يسمى قانون تركيب خارجي معرف على E ذو المعاملات في A

بتعبير أخر :

f قانون تركيب خارجي معرف على E ذو المعاملات في A $\Leftrightarrow$	$\begin{aligned} f:A\times E &\to E \\ (\alpha,x) &\to f(\alpha,x)\end{aligned}$

يرمز عادة للصورة $f(\alpha,x)$ بالرمز $\alpha\bullet x$ أو αx

b – أمثلة :

1 – لكل α من IR و M من $M_2(IR)$ حيث $M=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix}$ لدينا : $\alpha M=\begin{pmatrix} \alpha a_{11} & \alpha a_{12}\\ \alpha a_{21} & \alpha a_{22}\end{pmatrix}\in M_2(IR)$

إذن :التطبيق : $\begin{aligned} f:IR\times M_2(IR) &\to M_2(IR) \\ (\alpha,M) &\to \alpha M\end{aligned}$ قانون تركيب خارجي معرف على $M_2(IR)$ و معاملاته في IR

2 – لكل α من IR و f من $F(I,IR)$ (مجموعة الدوال العددية المعرفة على مجال I ضمن IR نحو IR)

لدينا : $\alpha f\in F(I,IR)$

إذن : التطبيق $\begin{aligned} g:IR\times F(I,IR) &\to F(I,IR) \\ (\alpha,f) &\to \alpha f\end{aligned}$ قانون تركيب خارجي معرف على $F(I,IR)$ و معاملاته في IR

2 – تعريف الفضاء المتجهي :

a – تعريف :

لتكن E مجموعة مزودة بقانون تركيب داخلي * و بقانون تركيب خارجي معاملاته في IR : $\begin{aligned} f:IR\times E &\to E \\ (\alpha,x) &\to \alpha\bullet x\end{aligned}$

نقول أن : $(E,*,\bullet)$ فضاء متجهي على IR أو فضاء متجهي حقيقي إذا وفقط إذا تحققت الشروط التالية :

1 – $(E,*)$ زمرة تبادلية

2 – $(\alpha+\beta)\bullet x=\alpha\bullet x+\beta\bullet x \qquad (\forall(\alpha,\beta)\in IR^2)(\forall x\in E)$

3 – $(\alpha\beta)\bullet x=\alpha\bullet(\beta\bullet x) \qquad (\forall(\alpha,\beta)\in IR^2)(\forall x\in E)$

4 – $\alpha\bullet(x*y)=\alpha\bullet x*\alpha\bullet y \qquad (\forall\alpha\in IR)(\forall(x,y)\in E^2)$

$1\bullet x = x \quad - 5 \qquad (\forall x \in E)$

في ما تبقى من هذا الدرس نرمز للقانون الداخلي * بالرمز + و لكل عنصر x من E بالرمز $\vec{x}$ و نسميه متجهة
منه التعريف التالي للفضاء المتجهي $(E,+,\times)$

نقول أن : $(E,+,\bullet)$ فضاء متجهي على IR أو فضاء متجهي حقيقي إذا وفقط إذا تحققت الشروط التالية :
1 – $(E,+)$ زمرة تبادلية
2 – $(\alpha+\beta)\vec{x} = \alpha\vec{x} + \beta\vec{y} \qquad (\forall(\alpha,\beta)\in IR^2)(\forall \vec{x}\in E)$
3 – $(\alpha\beta)\vec{x} = \alpha(\beta\vec{x}) \qquad (\forall(\alpha,\beta)\in IR^2)(\forall \vec{x}\in E)$
4 – $\alpha(\vec{x}+\vec{y}) = \alpha\vec{x} + \alpha\vec{y} \qquad (\forall\alpha\in IR)(\forall(\vec{x},\vec{y})\in E^2)$
5 – $1\bullet\vec{x} = \vec{x} \qquad (\forall x\in E)$

b – قواعد الحساب في فضاء متجهي :

ليكن $(E,+,\bullet)$ فضاء متجهي حقيقي لدينا الخاصيات التالية

1	$\vec{a}+\vec{x}=\vec{b} \Leftrightarrow \vec{x}=\vec{b}+(-\vec{a})$ المتجهة $\vec{b}+(-\vec{a})$ تسمى فرق المتجهتين $\vec{a}$ و $\vec{b}$ وتكتب كذلك $\vec{b}-\vec{a}$
2	$\alpha\vec{x}=\vec{0} \Leftrightarrow \alpha=0$ أو $\vec{x}=\vec{0} \qquad (\alpha\in IR)(\forall x\in E)$
3	$(-\alpha)\vec{x}=\alpha(-\vec{x})=-(\alpha\vec{x}) \qquad (\alpha\in IR)(\forall x\in E)$
4	$\alpha(\vec{y}-\vec{x})=\alpha\vec{y}-\alpha\vec{x} \qquad (\alpha\in IR)(\forall(\vec{x},\vec{y})\in E^2)$
5	$(\alpha-\beta)\vec{x}=\alpha\vec{x}-\beta\vec{y} \qquad (\forall(\alpha,\beta)\in IR^2)(\forall\vec{x}\in E)$

c – أمثلة و تمارين تطبيقية : (أنظر سلسلة التمارين)

II – الفضاء المتجهي الجزئي :

1 – تعريف :

ليكن $(E,+,\times)$ فضاء متجهي حقيقي و F جزء غير فارغ من E
نقول أن F فضاء متجهي جزئي من الفضاء E إذا وفقط إذا تحقق ما يلي :
1 – F مستقر بالنسبة للقانون الداخلي + أي : $\vec{x}+\vec{y}\in F \qquad (\forall(\vec{x},\vec{y})\in F^2)$
2 – F مستقر بالنسبة للقانون الخارجي × أي : $\lambda\vec{x}\in F \qquad (\forall\vec{x}\in F)(\forall\lambda\in IR)$

بتعبير أخر :

F فضاء متجهيا جزئيا من E	$\Leftrightarrow$	$\begin{cases} F\neq\emptyset \\ F\subset E \\ (\forall(\vec{x},\vec{y})\in F^2) \quad \vec{x}+\vec{y}\in F \\ (\forall\lambda\in IR)(\forall x\in F) \quad \lambda\vec{x}\in F \end{cases}$

2 – أمثلة :

1	$\{\vec{0}\}$ و E فضائين متجهيين جزئيين من الفضاء المتجهي $(E,+,\times)$
2	P_n مجموعة الحدوديات التي درجتها أصغر من تساوي n فضاء متجهي جزئي من الفضاء المتجهي

	$(F(IR,IR),+,\times)$
3	$\{(x,y)\in IR^2\ /y=2x\}$ فضاء متجهي جزئي من الفضاء المتجهي $(IR^2,+,\times)$ (تحقق من ذلك)

3 – الخاصية المميزة لفضاء متجهي جزئي :

ليكن $(E,+,\times)$ فضاء متجهي حقيقي و F جزء من E

F فضاء متجهيا جزئيا من E $\Leftrightarrow$ $\begin{cases} F\neq\emptyset \\ (\forall(\lambda,\beta)\in IR^2)(\forall(\vec{x},\vec{y})\in F^2) \quad \beta\vec{x}+\lambda\vec{y}\in F \end{cases}$

III – التأليفات الخطية :

1 – تعريف :

لتكن $\vec{x}_1$ و $\vec{x}_2$ و $\cdots$ و $\vec{x}_n$ متجهات من الفضاء المتجهي E و α_1 و α_2 و $\cdots$ و α_n أعدادا حقيقية . المتجهة $\vec{x}=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\vec{x}_i$ تسمى تأليفة خطية للمتجهات $\vec{x}_1$ و $\vec{x}_2$ و $\cdots$ و $\vec{x}_n$ ذات المعاملات α_1 و α_2 و $\cdots$ و α_n ونقول كذلك أن الأسرة $B=(\vec{x}_1,\vec{x}_2,\ldots,\vec{x}_n)$ تولد المتجهة $\vec{x}$ أو المتجهة $\vec{x}$ مولدة بالأسرة $B=(\vec{x}_1,\vec{x}_2,\ldots,\vec{x}_n)$ و نقول عن أسرة $B=(\vec{x}_1,\vec{x}_2,\ldots,\vec{x}_n)$ أنها تولد الفضاء المتجهي E إ وفقط إذا كانت كل متجهة $\vec{x}$ من E تكتب على شكل تأليفة خطية للمتجهات $\vec{x}_1$ و $\vec{x}_2$ و $\cdots$ و $\vec{x}_n$

بتعبير اخر:

$\vec{x}$ مولدة بالأسرة $\Leftrightarrow$ $B=(\vec{x}_1,\vec{x}_2,\ldots,\vec{x}_n)$ $(\exists(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n)\in IR^n) / \vec{x}=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\vec{x}_i$

الفضاء E مولد بالأسرة $\Leftrightarrow$ $B=(\vec{x}_1,\vec{x}_2,\ldots,\vec{x}_n)$ $(\forall\vec{x}\in E)(\exists(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n)\in IR^n) / \vec{x}=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\vec{x}_i$

2 – تمرين تطبيقي:

نعتبر المجموعة E المعرفة بالصيغة التالية : $E=\{(x,y,z)\in IR^3/x-y+3z=0\}$

1 – بين أن $(E,+,\bullet)$ فضاء متجهي حقيقي

2 – لتكن $\vec{e}_1=(1,1,0)$ و $\vec{e}_2=(0,3,1)$ متجهتين من E

بين أن الأسرة $(\vec{e}_1,\vec{e}_2)$ تولد الفضاء المتجهي $(E,+,\bullet)$

3 – الارتباط و الاستقلال الخطي:

a – تعريف

لتكن $B=(\vec{x}_1,\vec{x}_2,\ldots,\vec{x}_n)$ أسرة من متجهات الفضاء المتجهي $(E,+,\bullet)$

نقول أن:

الأسرة B مرتبطة خطيا أو مقيدة
$\Leftrightarrow (\exists(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n)\in IR^n) / (\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n)\neq(0,0,\ldots,0)$ و $\sum_{i=1}^{n}\alpha_i x_i=o$

الأسرة B مستقلة خطيا أو حرة $\Leftrightarrow \left(\forall(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n)\in IR^n \; ; \; \sum_{i=1}^{n}\alpha_i x_i = 0 \Rightarrow \alpha_1=\alpha_1=\cdots=\alpha_n=0 \right)$

b – مثال :

في الفضاء المتجهي $(M_2(IR),+,\cdot)$ نعتبر الأسرتين $B_1=(L,J)$ و $B_2=(L,J,K)$ بحيث :

$$L=\begin{pmatrix}1&0\\0&2\end{pmatrix} \quad \text{و} \quad J=\begin{pmatrix}0&2\\1&0\end{pmatrix} \quad \text{و} \quad K=\begin{pmatrix}2&6\\3&4\end{pmatrix}$$

لدينا : $2L+3J=2\begin{pmatrix}1&0\\0&2\end{pmatrix}+3\begin{pmatrix}0&2\\1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&0\\0&4\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&6\\3&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&6\\3&4\end{pmatrix}=K$

إذن : $2L+3J-K=0$

ومنه ألأسرة $B_2=(L,J,K)$ مقيدة لأن : $2L+3J-K=0$ و $(2,3,-1)\neq(0,0,0)$

من جهة أخرى لدينا :

$$\alpha L+\beta J=0 \Rightarrow \begin{pmatrix}\alpha&0\\0&2\alpha\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&2\beta\\\beta&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix}\alpha&2\alpha\\\beta&2\beta\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \alpha=\beta=0$$

إذن الأسرة $B_1=(L,J)$ حرة

c – خاصيات :

إذا كانت B أسرة مقيدة فإن كل أسرة تتضمن B تكون كذلك مقيدة

إذا كانت B أسرة ضمن أسرة حرة فإن B تكون كذلك حرة

بتعبير أخر :

B أسرة مقيدة و $B\subset B'$ $\Leftarrow$ B' أسرة مقيدة
B أسرة حرة و $B'\subset B$ $\Leftarrow$ B' أسرة حرة

1 – إذا كانت في أسرة B متجهتان متساويتان فإن B تكون مقيدة
2 – إذا كانت أحدى متجهات أسرة B على شكل تأليفة خطية للعناصر الأخرى فإن B تكون مقيدة
3– إذا كانت أسرة B حرة فإن جميع عناصر ها غير منعدمة و مختلفة مثنى مثنى

4 – أساس فضاء متجهي حقيقي:

a – تعريف :

ليكن $(E,+,\cdot)$ فضاء متجهي حقيقي

نقول أن أسرة $B=(\vec{x}_1,\vec{x}_2,\ldots,\vec{x}_n)$ من متجهات E أساس للفضاء المتجهي $(E,+,\cdot)$ إذا وفقط إذا كانت كل متجهة من E تكتب بكيفية **وحيدة** على شكل تأليفة خطية لمتجهات الأسرة B

بتعبير أخر :

$B=(\vec{x}_1,\vec{x}_2,\ldots,\vec{x}_n)$ أساس للفضاء E $\Leftrightarrow (\forall\vec{x}\in E)\left(\exists!(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n)\in IR^n\right) \Big/ \vec{x}=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i x_i$

الأعداد الحقيقية α_1 و α_2 و $\cdots$ و α_n تسمى إحداثيات المتجهة $\vec{x}$ بالنسبة للأساس $B=(\vec{x}_1,\vec{x}_2,\ldots,\vec{x}_n)$

b – مثال :

في $\left(IR^3,+,\bullet\right)$ نعتبر المتجهات التالية : $\vec{e}_1=\left(1,0,0\right)$ و $\vec{e}_2=\left(0,1,0\right)$ و $\vec{e}_3=\left(0,0,1\right)$

لنبين أن الأسرة $B=\left(\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3\right)$ أساس للفضاء المتجهي $\left(IR^3,+,\bullet\right)$

لتكن $\vec{x}=\left(a,b,c\right)\in IR^3$

$$\vec{x}=\left(a,b,c\right)=\left(a,0,0\right)+\left(0,b,0\right)+\left(0,0,c\right)$$

لدينا : $=a\left(1,0,0\right)+b\left(0,1,0\right)+c\left(0,0,1\right)$

$$=a\vec{e}_1+b\vec{e}_2+c\vec{e}_3$$

نفترض أنه توجد أعداد حقيقية أخرى a' و b' و c' بحيث : $\vec{x}=a'\vec{e}_1+b'\vec{e}_2+c'\vec{e}_3$

لدينا إذن $a\vec{e}_1+b\vec{e}_2+c\vec{e}_3=a'\vec{e}_1+b'\vec{e}_2+c'\vec{e}_3\Rightarrow(a-a')\vec{e}_1+(b-b')\vec{e}_2+(c-c')\vec{e}_3=\left(0,0,0\right)$

ومنه: $(a-a')\left(1,0,0\right)+(b-b')\left(0,1,0\right)+(c-c')\left(0,0,1\right)=\left(0,0,0\right)$

$$\Rightarrow\left(a-a',0,0\right)+\left(0,b-b',0\right)+\left(0,0,c-c'\right)=\left(0,0,0\right)$$

$$\Rightarrow\left(a-a',b-b',c-c'\right)=\left(0,0,0\right)$$

$\Rightarrow a=a'$ و $b=b'$ و $c=c'$

إذن كل متجهة من $\left(IR^3,+,\bullet\right)$ تكتب بكيفية **وحيدة** على شكل تأليفة خطية لمتجهات الأسرة $B=\left(\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3\right)$

و بالتالي $B=\left(\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3\right)$ أساس للفضاء المتجهي $\left(IR^3,+,\bullet\right)$

c – خاصيات :

ليكن $\left(E,+,\bullet\right)$ فضاء متجهي حقيقي

1	$B=\left(\vec{x}_1,\vec{x}_2,\dots,\vec{x}_n\right)$ أساس للفضاء E $\Leftrightarrow$ B أسرة مولدة وحرة للفضاء المتجهي E عدد متجهات الأساس B يسمى بعد الفضاء التجهي E ونرمز له ب $\dim E$ $\left(\dim E=card\left(B\right)\right)$
2	إذا كانت α_1 و α_2 و $\cdots$ و α_n إحداثيات متجهة $\vec{x}$ و β_1 و β_2 و $\cdots$ و β_n إحداثيات متجهة $\vec{y}$ فإن $\alpha_1+\beta_1$ و $\alpha_2+\beta_2$ و $\cdots$ و $\alpha_n+\beta_n$ إحداثيات المتجهة $\left(\vec{x}+\vec{y}\right)$
3	إذا كانت α_1 و α_2 و $\cdots$ و α_n إحداثيات متجهة $\vec{x}$ فإن إحداثيات المتجهة $\lambda\vec{x}$ هي : $\lambda\alpha_1$ و $\lambda\alpha_2$ و $\cdots$ و $\lambda\alpha_n$
4	جميع أساسات E مكونة من n متجهة $\Rightarrow \dim E=n$
5	$\left(\vec{e}_1,\vec{e}_2\right)$ أساس للفضاء E $\left(\dim E=2\right)$ $\Leftrightarrow$ $\left(\vec{e}_1,\vec{e}_2\right)$ حرة $\Leftrightarrow \det\left(\vec{e}_1,\vec{e}_2\right)\neq 0$
6	$\left(\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3\right)$ أساس للفضاء E $\left(\dim E=3\right)$ $\Leftrightarrow$ $\left(\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3\right)$ حرة $\Leftrightarrow \det\left(\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3\right)\neq 0$
7	B و B' أساسين للفضاء E $\Rightarrow card\left(B\right)=card\left(B'\right)$